PREMIERE EPREUVE A OPTION
MATHEMATIQUES
T - TA

Durée : 3 heures
Coefficient : 9

Dans ce problème, on examine la possibilité de recouvrir certaines figures planes par des disques fermés. On rappelle que le disque fermé de centre A de rayon R est l'ensemble des points M tels que $AM \leq R$. On dira que les disques $D_1, D_2, \ldots, D_n$ recouvrent la figure F si chaque point de F est dans au moins un des disques D_i.

1. Montrer qu'un triangle ABC dont l'angle en A vérifie $\hat{A} \geq \frac{\pi}{2}$ est recouvert par le disque de diamètre BC.

Montrer qu'un disque de diamètre inférieur ne peut pas recouvrir le triangle.

2. Montrer qu'un triangle ABC ayant ses trois angles aigus est recouvert par le disque de centre O de rayon R, où O est le centre du cercle circonscrit à ABC et R son rayon.

Montrer que ce disque de centre O est le seul disque de rayon R qui recouvre ABC, et qu'un disque de rayon strictement inférieur à R ne peut recouvrir le triangle ABC. Pour cela on se rappellera que $\overrightarrow{OA}\sin(2\hat{A}) + \overrightarrow{OB}\sin(2\hat{B}) + \overrightarrow{OC}\sin(2\hat{C}) = \vec{0}$ et on montrera que pour tout point M différent de O, l'un au moins des trois produits scalaires $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OC}$ est négatif ou nul, et qu'une des trois distances MA, MB, MC est strictement supérieure à R.

3. Montrer que le carré de côté 2 est recouvert par un disque de rayon $\sqrt{2}$, et qu'il ne peut être recouvert par un disque plus petit.

4. Montrer quer l'on peut recouvrir le carré de côté 2 avec n^2 disques de rayon $\frac{\sqrt{2}}{n}$.

5. Quelle est la valeur minimum du rayon r permettant de recouvrir le carré de côté 2 avec 4 disques de rayon r ?

6. Soit D le disque de rayon 1 et de centre O, et C le cercle de rayon 1 et de centre O. Soit $r < 1$. Montrer que l'arc de C couvert par un disque de rayon r a pour longueur au plus $2\text{Arc}\sin r$.

En déduire qu'il faut au moins $\left\lceil \frac{\pi}{\text{Arc}\sin r} \right\rceil$ disques de rayon r pour recouvrir D et en particulier qu'il faut au moins 3 tels disques pour $r < 1$ (la notation $\lceil x \rceil$ représente le plus petit entier $\geq x$).

7. Montrer que 3 disques suffisent pour $r \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ et que 4 disques suffisent pour $r \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. Montrer que n disques suffisent lorsque $r \geq \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{n}}$. On pourra pour cela calculer le rayon du cercle circonscrit à un triangle isocèle de côtés 1, 1 et $2\sin\frac{\pi}{n}$.

9. Peut-on améliorer ce dernier résultat ?

10. Montrer qu'il faut au moins $\left\lceil \frac{1}{r^2} \right\rceil$ disques de rayon $r < 1$ pour recouvrir D.

11. Montrer que pour $n > 4$, il n'est pas possible de recouvrir le disque D avec n disques de rayon $\sin\frac{\pi}{n}$.

Il est désormais assuré que pour recouvrir le disque D avec 6 disques de rayon r, il suffit que $r \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$, mais qu'il est nécessaire que $r > \frac{1}{2}$. On souhaite diminuer l'écart entre la valeur reconnue nécessaire (0.5) et celle reconnue suffisante (0.577349). Pour cela on choisit un repère orthonormal direct d'origine O, et un angle α entre 0 et $\frac{\pi}{3}$, la longueur $r = \frac{1}{2\cos\alpha}$, le disque dont le centre a pour coordonnées $(-r,0)$ de rayon r, le disque dont le centre a pour coordonnées $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right),0\right)$ de rayon r et leurs images par les rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

12. Montrer que les 6 disques décrits ci-dessus recouvrent D seulement si l'inégalité $r \geq \sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ a lieu.

13. Quelle est la plus petite valeur de r (entre $\frac{1}{2}$ et 1) qui réponde à cette exigence ?

14. Vérifier que cette valeur de r est suffisante pour recouvrir D avec 6 disques de rayon r.

15. Que peut-on dire à présent du rayon minimum ρ permettant que 6 disques de rayon ρ recouvrent D ?